Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper

Blatt 3

Abgabe: 12.11.2018

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**

Seien $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger nichtarchimedischer normierter Körper und x ein Element aus $\mathfrak{M}_K$. Wie sieht das Inverse vom Element $1-x$ in O_K aus?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $(K, |\cdot|)$ ein nichtarchimedischer normierter Körper.

(a) Gegeben x und y aus K mit $|x| \neq |y|$, zeige, dass $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$. Schließe daraus, dass jedes Dreieck gleichschenklig ist.

(b) Falls ein Dreieck nicht gleichseitig ist, dann hat die dritte Seite echt kleinere Länge als die anderen zwei Seiten.

(c) Keine drei verschiedenen Punkte sind kollinear: Für alle a, b und c aus K gilt

$$|a-b| < |b-c| + |c-b|.$$

(d) Zeige, dass die Pythagoras Formel für kein Dreieck in $\mathbb{Q}_p$ gelten kann.

(e) Zeige, dass jede Menge äquidistanter Punkte in $\mathbb{Q}_p$ Mächtigkeit höchstens p hat.

HINWEIS: Jedes Element aus $\mathbb{Q}_p$ lässt sich als (unendliche) Reihe schreiben.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Ein Körper K ist *angeordnet*, falls es eine totale Ordnung $<$ auf K gibt, welche mit den Körperoperation kompatibel ist:

$$\text{Falls } a < b, \text{ für beliebiges } c \text{ und } 0 < d, \text{dann ist } a + c < b + c \text{ und } a \cdot d < b \cdot d.$$

Eine Untergruppe $H \leq (K, +, <)$ ist *konvex*, falls jedes Element a aus K unmittelbar in H liegt, wenn $0 < a < h$ für ein h aus H.

Sei ν eine Bewertung vom Rang 1 auf dem angeordneten Körper K.

(a) Zeige, dass O_ν genau dann konvex ist, wenn $\nu(b) \leq \nu(a)$ für alle $0 < a \leq b$ aus K. Wir sagen, dass ν konvex ist.

(b) Wenn O_ν konvex ist, dann so ist $\mathfrak{M}_\nu$.

Der angeordnete Körper ist *archimedisch*, wenn für alle x und y positiv es ein n aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$y < n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n}.$$

(c) Falls K archimedisch ist, dann ist jede konvexe Bewertung trivial.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.